Populer: Jurnal Penelitian Mahasiswa
Volume. 5 Nomor. 3 September 2026
e-ISSN: 2963-5306; p-ISSN: 2962-116X, Hal. 378-391
DOI: https://doi.org/10.58192/populer.v5i3.5665
Tersedia: https://journal.unimar-amni.ac.id/index.php/Populer

Penerapan *Learning Trajectory* pada Materi Luas Permukaan dan Volume Bola melalui Pendekatan Lingkaran dan Kerucut pada Siswa Kelas IX-1 SMPS Pauly Mandiri Tanjung Morawa

Kairuddin[1*], Nurbaiti[2], Nur Fadillah Yumna[3], Nessa Alexandria Br. Sinaga[4], Yemima Eraninta[5], Anni Fadillah[6]
[1-6] Universitas Negeri Medan, Indonesia
Email: Kairuddin@unimed.ac.id[1*], baitiiii04@gmail.com[2], nurfadillahyumna07@gmail.com[3], nessa230307sinaga@gmail.com[4], yemimaesinurat@gmail.com[5], annifadilah1904@gmail.com[6]
[*]*Penulis Korespondensi:* Kairuddin@unimed.ac.id

Abstract. *Mathematics learning requires students to understand concepts rather than merely memorize formulas. However, students often experience difficulties connecting concrete experiences with formal mathematical representations, particularly when learning the surface area and volume of a sphere. This study aims to describe the implementation of Learning Trajectory in teaching these concepts through circle- and cone-based approaches to IX-1 students at SMPS Pauly Mandiri Tanjung Morawa. This study employed a descriptive qualitative approach involving three student groups. The learning activities were organized into four stages: situational context, model of, model for, and formal mathematics. Concrete learning media, student worksheets, pre-tests, post-tests, classroom observations, and documentation were used to support the learning process and collect data. The activities enabled students to explore the relationship between the surface area of a sphere and the area of a circle, as well as the relationship between the volume of a sphere and the volume of a cone. The findings showed that all groups could solve problems involving direct application of the formulas after the learning activities. However, difficulties remained in problems requiring algebraic manipulation and analysis of the relationship between changes in radius and volume. These findings indicate that Learning Trajectory can support the development of students' conceptual understanding through concrete experiences, although further learning activities are needed to strengthen mathematical reasoning and problem-solving skills.*

Keywords: *Conceptual Understanding; Learning Trajectory; Mathematics Learning; Sphere; Student Learning Activities.*

Abstrak. Pembelajaran matematika menuntut siswa untuk memahami konsep, bukan sekadar menghafal rumus. Namun, siswa masih dapat mengalami kesulitan dalam menghubungkan pengalaman konkret dengan representasi matematika formal, khususnya pada materi luas permukaan dan volume bola. Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan penerapan *Learning Trajectory* pada pembelajaran luas permukaan dan volume bola melalui pendekatan lingkaran dan kerucut pada siswa kelas IX-1 SMPS Pauly Mandiri Tanjung Morawa. Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif deskriptif dengan melibatkan tiga kelompok siswa. Aktivitas pembelajaran dirancang melalui empat tahapan, yaitu *situational context, model of, model for*, dan *formal mathematics*. Media konkret, Lembar Kerja Peserta Didik (LKPD), *pretest*, *posttest*, observasi, dan dokumentasi digunakan untuk mendukung proses pembelajaran serta pengumpulan data. Melalui aktivitas tersebut, siswa mengeksplorasi hubungan antara luas permukaan bola dan luas lingkaran, serta hubungan antara volume bola dan volume kerucut. Temuan penelitian menunjukkan bahwa seluruh kelompok mampu menyelesaikan soal yang menggunakan rumus secara langsung setelah mengikuti pembelajaran. Namun, kesulitan masih ditemukan pada soal yang memerlukan manipulasi aljabar dan analisis hubungan antara perubahan jari-jari dan volume bola. Hal ini menunjukkan bahwa *Learning Trajectory* dapat mendukung perkembangan pemahaman konseptual siswa melalui pengalaman konkret, tetapi aktivitas lanjutan tetap diperlukan untuk memperkuat penalaran matematis dan kemampuan pemecahan masalah.

Kata kunci: Aktivitas Pembelajaran; Bola; *Learning Trajectory*; Pembelajaran Matematika; Pemahaman Konseptual.

1. LATAR BELAKANG

Matematika merupakan salah satu mata pelajaran yang berperan dalam mengembangkan kemampuan berpikir logis, kritis, sistematis, dan pemecahan masalah. Namun, dalam pembelajaran matematika, siswa tidak hanya dituntut untuk menghafal rumus, tetapi juga perlu

Naskah Masuk: 31 Juli 2026; Revisi: 31 Agustus 2026; Diterima: 28 September 2026; Terbit: 30 September 2026

memahami konsep melalui pengalaman belajar yang dapat menghubungkan pengetahuan awal dengan konsep matematika yang lebih formal. Salah satu materi yang membutuhkan pemahaman konsep tersebut adalah bangun ruang bola. Pada materi bola, siswa perlu memahami hubungan antara jari-jari, diameter, lingkaran, luas permukaan, dan volume. Kesulitan dalam memahami hubungan antar konsep tersebut dapat menyebabkan siswa hanya mengingat rumus tanpa memahami bagaimana rumus tersebut diperoleh.

Kesulitan siswa dalam memahami konsep volume bola dapat berkaitan dengan pemahaman terhadap unsur-unsur dasar bola dan konsep matematika yang berhubungan. Siswa dapat mengalami kesulitan dalam memahami penggunaan nilai π, membedakan jari-jari dan diameter, serta memahami konsep yang berkaitan dengan volume bola. Penggunaan media konkret, seperti bola dan kerucut, dapat membantu siswa melihat hubungan antara konsep-konsep tersebut (Utami et al., 2025). Hal ini menunjukkan bahwa pembelajaran materi bola perlu memberikan pengalaman konkret agar siswa dapat membangun pemahaman konsep secara bertahap.

Pembelajaran yang mengaitkan konsep matematika dengan situasi atau objek yang dekat dengan kehidupan sehari-hari siswa juga dapat membantu membuat konsep yang abstrak menjadi lebih mudah dipahami. Objek media yang berbentuk bola dapat digunakan sebagai konteks untuk mengeksplorasi konsep geometri, seperti jari-jari, diameter, luas permukaan, dan volume (Rosyida et al., 2026). Penggunaan konteks di kehidupan nyata juga dapat menjadi dasar dalam merancang *Hypothetical Learning Trajectory* agar siswa dapat membangun konsep melalui pengalaman sebelum menuju bentuk matematika yang lebih formal (Tarida et al., 2023).

Salah satu pendekatan yang dapat digunakan dalam proses tersebut adalah *Learning Trajectory* (LT). *Learning Trajectory* menggambarkan rangkaian proses belajar yang dirancang untuk membantu siswa berkembang dari pemahaman awal menuju pemahaman konsep yang lebih formal. Penerapan *Learning Trajectory* dapat digunakan untuk mengarahkan proses belajar siswa melalui tahapan yang disusun berdasarkan perkembangan pemahaman siswa (Meirida et al., 2021). Kajian mengenai *Learning Trajectory* dalam pembelajaran geometri juga menunjukkan bahwa *Learning Trajectory* dapat mendukung pembelajaran melalui visualisasi, objek, dan aktivitas yang dilakukan secara bertahap (Wahyuni et al., 2025). Selain itu, *Hypothetical Learning Trajectory* juga dapat diterapkan pada materi bangun ruang sisi lengkung untuk siswa kelas IX (Nursyahidah et al., 2024), sedangkan *Learning Trajectory* dapat digunakan pada materi kerucut untuk membantu siswa membangun pemahaman konsep secara bertahap (Amahsyah et al., 2024).

Berdasarkan kajian tersebut, pembelajaran materi luas permukaan dan volume bola dalam penelitian ini disusun melalui *Learning Trajectory* yang terdiri atas tahap *situational context, model of, model for,* dan *formal*. Pada tahap *situational context*, siswa diberikan pengalaman melalui objek bola dan kegiatan yang dekat dengan konsep yang akan dipelajari. Selanjutnya, pada tahap *model of*, siswa mulai membuat representasi dari situasi tersebut untuk melihat hubungan antara bola dengan lingkaran maupun kerucut. Pada tahap *model for*, representasi yang telah dibuat digunakan untuk membantu siswa menemukan hubungan matematis dan membangun strategi penyelesaian. Setelah pemahaman siswa berkembang, pembelajaran diarahkan menuju tahap *formal*, yaitu siswa dapat memahami dan menyatakan rumus luas permukaan dan volume bola secara matematis.

Pada materi luas permukaan bola, pembelajaran diarahkan untuk menemukan hubungan bahwa permukaan sebuah bola dapat direpresentasikan melalui empat daerah berbentuk lingkaran dengan jari-jari yang sama, sehingga diperoleh hubungan luas permukaan bola dengan luas lingkaran. Sementara itu, pada materi volume bola digunakan pendekatan melalui kerucut untuk membantu siswa memahami hubungan antara volume bola dan volume kerucut. Dengan menggunakan media bola, kerucut, dan LKPD, siswa tidak hanya menerima rumus, tetapi melakukan kegiatan yang mengarahkan mereka untuk menemukan hubungan tersebut secara bertahap.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini dilakukan untuk mendeskripsikan penerapan *Learning Trajectory* pada materi luas permukaan dan volume bola melalui pendekatan lingkaran dan kerucut pada siswa SMP kelas IX. Penerapan *Learning Trajectory* diharapkan dapat membantu siswa memahami konsep luas permukaan dan volume bola melalui pengalaman konkret, representasi, strategi penyelesaian, hingga memperoleh bentuk matematis yang formal. Dengan demikian, pembelajaran tidak hanya berorientasi pada kemampuan mengingat rumus, tetapi juga pada proses siswa dalam membangun pemahaman terhadap konsep bola.

2. KAJIAN TEORITIS

Pendidikan matematika pada era modern tidak lagi berorientasi pada penguasaan rumus secara abstrak, tetapi diarahkan agar peserta didik mampu memahami konsep matematika melalui pengalaman yang kontekstual dan dekat dengan kehidupan sehari-hari. Namun, pada kenyataannya pembelajaran matematika di sekolah masih didominasi oleh penyampaian konsep secara formal dan simbolik sehingga siswa sering mengalami kesulitan dalam menghubungkan materi yang dipelajari dengan lingkungan di sekitarnya. Kondisi tersebut

menyebabkan pembelajaran matematika cenderung dianggap sulit, kurang bermakna, dan kurang menarik bagi peserta didik (Rosyida et al., 2026).

Belajar geometri membuat siswa sendiri yang akan membangun konsep-konsep selama proses belajar, sehingga guru tidak dapat hanya mentransfer informasi yang harus dihafalkan siswa (Fauzi, 2021). Pembelajaran matematika yang bermakna dapat difasilitasi melalui penggunaan model, strategi, dan metode pembelajaran yang disesuaikan dengan tingkat berpikir dan perkembangan siswa. Proses pembelajaran tersebut dapat membantu mengatasi kesulitan siswa dalam memahami matematika, meminimalkan kecemasan matematis, serta mengubah pandangan siswa terhadap matematika yang dianggap sulit.

Salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk mendukung pembelajaran matematika yang bermakna adalah *Realistic Mathematics Education* (RME). RME memberikan kesempatan kepada siswa untuk membangun pengetahuan dan pemahaman melalui situasi yang nyata dan bermakna. Aklimawati et al. (2022) menyatakan bahwa "Siswa harus diberi kesempatan untuk membangun pengetahuan dan pemahaman mereka sendiri melalui penggunaan situasi nyata yang bermakna sehingga menjadi sumber belajar." Melalui situasi tersebut, siswa dapat mengembangkan strategi dan menemukan hubungan matematis sebelum diarahkan pada bentuk matematika formal.

Penerapan RME dapat dikembangkan melalui *Learning Trajectory* atau lintasan belajar. Juana et al. (2023) menjelaskan bahwa *Learning Trajectory* merupakan jalur pembelajaran untuk memperoleh suatu konsep matematika. Lintasan belajar menggambarkan tahapan aktivitas yang dilalui siswa dalam membangun pemahaman konsep secara bertahap. Sejalan dengan hal tersebut, Umasugi et al. (2022) menunjukkan bahwa *Learning Trajectory* berbasis RME dapat menjadi alternatif bagi guru dalam merancang pembelajaran yang mendukung perkembangan pemahaman konsep, penggunaan strategi, komunikasi, dan penalaran matematis siswa.

Learning Trajectory berbasis RME juga dapat diterapkan pada materi yang berkaitan dengan luas permukaan dan volume. Kohar et al. (2021) menunjukkan penerapan *Learning Trajectory* berbasis RME pada pembelajaran pengukuran luas permukaan dan volume. Hal tersebut menunjukkan bahwa konsep pengukuran dapat dipelajari melalui rangkaian aktivitas yang menghubungkan pengalaman siswa dengan konsep matematika secara bertahap. Pada materi bangun ruang sisi lengkung, Nursyahidah et al. (2025) mengembangkan *Learning Trajectory* untuk siswa kelas IX melalui pendekatan *Javanese Ethno-Realistic Mathematics Education* yang mencakup aktivitas untuk menemukan luas permukaan dan volume bola.

Aktivitas tersebut mengarahkan siswa untuk membangun pemahaman melalui hubungan antara objek dan konsep geometri sebelum sampai pada bentuk matematika formal.

Berdasarkan landasan tersebut, pembelajaran luas permukaan dan volume bola pada siswa kelas IX-1 SMP Pauly Mandiri Tanjung Morawa dirancang melalui pendekatan *Realistic Mathematics Education* dengan lintasan pembelajaran yang terdiri atas *situational context, model of, model for,* dan *formal mathematics*. Pada tahap *situational context*, siswa dihadapkan pada objek atau situasi nyata yang berkaitan dengan bola. Selanjutnya, pada tahap model of, siswa menggunakan representasi dari situasi tersebut untuk menemukan hubungan matematis. Representasi tersebut kemudian berkembang menjadi *model for* yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang lebih umum. Pada tahap *formal mathematics*, siswa diarahkan untuk menggeneralisasi hubungan yang telah ditemukan menjadi konsep dan rumus luas permukaan serta volume bola.

Lintasan tersebut memiliki keterkaitan dengan tujuan pembelajaran karena setiap tahap memberikan pengalaman yang mendukung perkembangan pemahaman siswa. Situasi nyata menjadi titik awal untuk membangun pemahaman, representasi membantu siswa melihat hubungan matematis, dan proses matematisasi mengarahkan siswa menuju konsep formal. Dengan demikian, pembelajaran tidak hanya menargetkan kemampuan siswa dalam menggunakan rumus luas permukaan dan volume bola, tetapi juga membantu siswa memahami hubungan matematis yang mendasari rumus tersebut sehingga konsep dapat dipahami dan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif deskriptif dengan menerapkan *Learning Trajectory* pada materi luas permukaan dan volume bola. Perancangan pembelajaran diawali dengan menyusun Lembar Kerja Peserta Didik (LKPD) yang memuat tujuan dan aktivitas pembelajaran serta soal untuk mengetahui pemahaman awal dan akhir siswa. LKPD disusun berdasarkan tahapan *Learning Trajectory* yang terdiri atas *situational context, model of, model for,* dan *formal*. Menurut Lestari (2022), *Learning Trajectory* merupakan alur belajar yang dilalui siswa untuk mencapai tujuan pembelajaran yang dapat dilihat melalui respons dan perkembangan proses berpikir siswa. Dalam perancangannya, *Learning Trajectory* dapat didasarkan pada *Hypothetical Learning Trajectory* (HLT) yang terdiri atas tiga komponen utama, yaitu tujuan pembelajaran, aktivitas pembelajaran, dan hipotesis mengenai perkembangan proses berpikir siswa. Penerapan LT dalam pembelajaran juga dapat dilakukan

dengan membandingkan HLT yang dirancang dengan alur belajar yang muncul selama pembelajaran (Fauziyah, 2023).

Penelitian dilaksanakan pada siswa kelas IX-1 di SMP Pauly Mandiri Tanjung Morawa yang dibagi menjadi tiga kelompok. Kegiatan pembelajaran menggunakan LKPD dan media berupa bola, kertas, gunting, lem, kerucut, dan beras untuk membantu siswa menemukan konsep luas permukaan dan volume bola. Pada tahap awal, siswa diberikan *pre-test* untuk mengetahui pemahaman awal terhadap materi. Selanjutnya, siswa mengikuti pembelajaran berdasarkan *Learning Trajectory* yang telah dirancang. Pada kegiatan pembelajaran luas permukaan bola, siswa mengamati bola yang telah disiapkan, kemudian menggunakan kertas untuk membuat bentuk lingkaran dengan diameter yang sama dengan diameter bola. Permukaan bola selanjutnya dibagi menjadi beberapa bagian dan disusun hingga membentuk empat lingkaran. Melalui aktivitas tersebut, siswa diarahkan untuk menemukan bahwa luas permukaan bola dapat dipahami sebagai empat kali luas lingkaran.

Pada kegiatan pembelajaran volume bola, siswa menggunakan kerucut yang telah disediakan dengan diameter alas yang sama dengan diameter bola dan tinggi kerucut sebesar setengah diameter bola atau sama dengan jari-jari bola. Siswa kemudian menggunakan beras untuk membandingkan volume kerucut dengan volume bola. Hasil percobaan menunjukkan bahwa dua kali volume beras dalam kerucut setara dengan volume setengah bola, sedangkan empat kali volume beras dalam kerucut setara dengan satu volume bola. Melalui aktivitas tersebut, siswa diarahkan untuk memahami hubungan antara volume kerucut dan volume bola sehingga dapat menemukan konsep volume bola secara bertahap. Seluruh aktivitas dilakukan secara berkelompok melalui pengamatan, percobaan, diskusi, dan pengerjaan LKPD hingga siswa memperoleh konsep formal luas permukaan dan volume bola.

Data penelitian diperoleh melalui *pre-test*, hasil pengerjaan LKPD, pengerjaan *post-test*, observasi selama proses pembelajaran, dan dokumentasi kegiatan. Observasi digunakan untuk mengidentifikasi respons, strategi, serta kesulitan siswa selama mengikuti setiap tahapan *Learning Trajectory*. Hasil pekerjaan siswa pada LKPD dianalisis untuk melihat perkembangan pemahaman siswa dari kegiatan awal hingga memahami konsep secara formal.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Implementasi Learning Trajectory pada Materi Luas Permukaan dan Volume Bola

Pada tahap awal, siswa diberikan *pretest* berupa beberapa soal yang dituliskan di papan tulis untuk mengetahui pemahaman awal mereka mengenai materi luas permukaan dan volume bola. Hasil *pretest* menunjukkan bahwa pemahaman awal siswa masih tergolong rendah. Tidak

ada siswa yang berhasil menjawab soal dengan benar, bahkan hanya beberapa siswa yang mengetahui rumus luas permukaan dan volume bola. Berdasarkan hasil tersebut, pembelajaran dilanjutkan melalui aktivitas yang dirancang berdasarkan *Learning Trajectory* dengan menggunakan Lembar Kerja Peserta Didik (LKPD) sebagai panduan dalam memahami konsep luas permukaan dan volume bola.

LKPD tersebut disusun untuk mengarahkan siswa dalam membangun pemahaman konsep secara bertahap. Siswa terlebih dahulu diperkenalkan pada situasi yang berkaitan dengan benda berbentuk bola, kemudian melakukan aktivitas menggunakan benda konkret. Melalui kegiatan tersebut, siswa diarahkan untuk mengamati, mengeksplorasi, dan menemukan hubungan matematis yang mendasari konsep luas permukaan dan volume bola hingga memahami bentuk rumus formalnya. Dengan demikian, siswa tidak hanya menerima rumus yang sudah jadi, tetapi juga memperoleh kesempatan untuk membangun pemahaman melalui aktivitas yang dilakukan secara langsung.

Aktivitas Pembelajaran dalam Menemukan Konsep Luas Permukaan Bola

Pembelajaran materi luas permukaan bola dilakukan melalui aktivitas konkret yang dipandu oleh peneliti di depan kelas dan diikuti siswa secara berkelompok. Alat dan bahan yang digunakan meliputi bola plastik, gunting, kertas, dan lem. Seluruh kegiatan mengikuti tahapan dalam LKPD, dengan peneliti memperagakan setiap langkah terlebih dahulu sebelum siswa mempraktikkannya bersama kelompok masing-masing.

Kegiatan diawali dengan mengamati bola plastik yang kemudian dipotong menjadi dua bagian untuk menunjukkan bentuk lingkaran pada potongannya. Selanjutnya, siswa membuat lingkaran pada kertas dengan ukuran yang sesuai dengan lingkaran hasil potongan bola. Setelah itu, permukaan bola dipotong menjadi bagian-bagian kecil dan disusun pada lingkaran yang telah dibuat. Melalui kegiatan ini, siswa mengamati seberapa banyak bagian lingkaran yang dapat ditutupi oleh seluruh potongan permukaan bola.



Gambar 1. Kegiatan menempelkan potongan permukaan bola pada lingkaran

Berdasarkan hasil pengamatan, siswa diarahkan untuk menemukan hubungan bahwa luas permukaan bola setara dengan empat kali luas lingkaran yang berjari-jari sama dengan bola. Hubungan tersebut kemudian digunakan untuk memperoleh rumus luas permukaan bola, yaitu

$Lp = 4\ x\ \pi r^2$. Dengan demikian, siswa memperoleh kesempatan untuk memahami asal-usul rumus melalui aktivitas konkret sebelum mempelajari bentuk matematis formalnya.

Aktivitas Pembelajaran dalam Menemukan Konsep Volume Bola

Pembelajaran materi volume bola dilakukan melalui percobaan menggunakan bola plastik, kerucut, beras, dan wadah. Kegiatan diawali dengan peneliti memperagakan langkah-langkah percobaan di depan kelas sesuai petunjuk dalam LKPD. Setelah itu, perwakilan dari setiap kelompok maju untuk melakukan percobaan menggunakan beras, sedangkan siswa lainnya mengamati proses yang berlangsung.

Percobaan dimulai dengan menyiapkan kerucut yang tinggi dan jari-jari alasnya sama dengan jari-jari bola. Bola kemudian dipotong menjadi dua bagian untuk digunakan sebagai wadah. Peneliti mengisi kerucut dengan beras hingga penuh, lalu memindahkannya ke dalam setengah bola. Selanjutnya, perwakilan kelompok melakukan percobaan serupa di depan kelas untuk menunjukkan hasil pengisian dan mengamati hubungan volume kedua bangun tersebut.



Gambar 2. Kegiatan memindahkan beras ke dalam kerucut

Berdasarkan hasil percobaan, siswa diarahkan untuk menemukan hubungan antara volume kerucut dan volume bola. Dengan menggunakan rumus volume kerucut $V = \frac{1}{3}\pi r^2$, serta tinggi kerucut yang sama dengan jari-jari bola $t = r$, diperoleh volume kerucut sebesar $V = \frac{1}{3}\pi r^3$. Hasil percobaan menunjukkan bahwa volume setengah bola setara dengan dua kali volume kerucut, sehingga volume satu bola setara dengan empat kali volume kerucut. Dari hubungan tersebut, diperoleh rumus volume bola, yaitu $V = 4\frac{1}{3}\pi r^3$.

Perubahan Pemahaman Siswa Berdasarkan Hasil Pretest dan Posttest

Setelah mengikuti pembelajaran menggunakan *Learning Trajectory*, pemahaman siswa dievaluasi melalui posttest untuk mengetahui perkembangan pemahaman mereka terhadap materi luas permukaan dan volume bola.

Tabel 1. Hasil posttest luas permukaan bola

No	Soal	Kel.1	Keterangan	Kel.2	Keterangan	Kel.3	Keterangan
1	Sebuah bola memiliki jari-jari 7 cm. Tentukan luas permukaan bola tersebut.	Mampu menjawab dengan benar	Siswa berhasil memasukkan rumus luas permukaan bola dengan tepat dan menyelesaikan perhitungan dengan benar	Mampu menjawab dengan benar	Siswa berhasil memasukkan rumus luas permukaan bola dengan tepat dan menyelesaikan perhitungan dengan benar.	Mampu menjawab dengan benar	Siswa berhasil memasukkan rumus luas permukaan bola dengan tepat dan menyelesaikan perhitungan dengan benar.
2	Sebuah bola memiliki diameter 14 cm. Tentukan luas permukaan bola tersebut.	Mampu menjawab dengan benar	Siswa berhasil menentukan jari-jari, memasukkan rumus luas permukaan bola, dan menyelesaikan perhitungan dengan benar.	Belum mampu menjawab dengan benar	Siswa sudah dapat menggunakan rumus luas permukaan bola, tetapi lupa untuk mengubah diameter menjadi jari-jari terlebih dahulu.	Mampu menjawab dengan benar	Siswa berhasil menentukan jari-jari, memasukkan rumus luas permukaan bola, dan menyelesaikan perhitungan dengan benar.
3	Sebuah bola memiliki luas permukaan 616 cm^2. Jika $\pi = \frac{22}{7}$, jari-jari bola tersebut adalah.	Belum mampu menjawab dengan benar	Siswa masih bingung menentukan jari-jari ketika luas permukaan bola diketahui, terutama saat mengubah rumus untuk mencari *r*.	Mampu menjawab dengan benar	Siswa sudah mampu menentukan jari-jari bola dari luas permukaan yang diketahui dengan menggunakan rumus secara tepat.	Belum mampu menjawab dengan benar	Siswa sudah mampu menuliskan rumus luas permukaan bola, tetapi masih bingung mengubah susunan rumus untuk menentukan jari-jari.

Tabel 2. Hasil posttest volume bola

No	Soal	Kel.1	Keterangan	Kel.2	Keterangan	Kel.3	Keterangan
1	Sebuah bola mainan memiliki jari-jari sebesar 21 cm. Hitunglah volume bola mainan tersebut! ($\pi = \frac{22}{7}$)	Mampu menjawab dengan benar	Siswa mampu menentukan jari-jari yang diketahui dan memasukkan ke rumus dengan tepat, serta menyelesaikan perhitungan dengan benar	Mampu menjawab dengan benar	Siswa mampu menentukan jari-jari yang diketahui dan memasukkan ke rumus dengan tepat, serta menyelesaikan perhitungan dengan benar	Mampu menjawab dengan benar	Siswa mampu menentukan jari-jari yang diketahui dan memasukkan ke rumus dengan tepat, serta menyelesaikan perhitungan dengan benar
2	Sebuah wadah penampung air berbentuk setengah bola padat memiliki diameter 28	Mampu menjawab dengan benar	Siswa berhasil memahami bahwa wadah berbentuk setengah bola sehingga menggunakan setengah dari rumus volume	Mampu menjawab dengan benar	Siswa berhasil memahami bahwa wadah berbentuk setengah bola sehingga menggunakan setengah dari rumus volume	Mampu menjawab dengan benar	Siswa berhasil memahami bahwa wadah berbentuk setengah bola sehingga menggunakan setengah dari rumus volume

	cm. Berapakah volume maksimum air yang dapat ditampung oleh wadah tersebut?		bola. Siswa juga mampu mengubah diameter menjadi jari-jari dengan benar.		bola. Siswa juga mampu mengubah diameter menjadi jari-jari dengan benar.		bola. Siswa juga mampu mengubah diameter menjadi jari-jari dengan benar walau ada sedikit rasa bingung saat proses pengerjaan.
3	Sebuah bola memiliki jari-jari 6cm. Jika jari-jari bola diperbesar menjadi 12 cm, berapa kali lipat volume bola tersebut?	Belum mampu menjawab dengan benar	Siswa berhasil memahami hubungan antara perubahan jari-jari dan volume bola, hanya saja saat melakukan perhitungan ada kesalahan yang dilakukan, sehingga hasil yang didapat belum sesuai.	Mampu menjawab dengan benar	Siswa berhasil memahami perubahan jari-jari menjadi dua kali lipat serta volume menjadi delapan kali lipat, dan berhasil menyelesaikan perhitungan dengan benar.	Belum mampu menjawab dengan benar	Siswa sudah berhasil memahami bahwa perubahan jari-jari menjadi dua kali lipat, hanya saja saat proses pengerjaan mereka membuat volume yang ada tetap sama dan tidak berubah.

Setelah mengikuti pembelajaran berbasis *Learning Trajectory* melalui aktivitas konkret dan penggunaan LKPD, hasil *posttest* menunjukkan bahwa seluruh kelompok mampu menyelesaikan soal yang menggunakan rumus secara langsung. Meskipun demikian, kemampuan siswa masih bervariasi ketika menghadapi soal yang membutuhkan pengolahan informasi dan analisis hubungan matematis.

Pada materi luas permukaan bola, seluruh kelompok berhasil menghitung luas permukaan ketika jari-jari diketahui. Namun, masih ditemukan kesalahan dalam menggunakan diameter sebagai informasi awal dan menentukan jari-jari berdasarkan luas permukaan yang telah diketahui. Sementara itu, pada materi volume bola, seluruh kelompok mampu menghitung volume bola dan volume wadah berbentuk setengah bola. Kesulitan muncul ketika siswa diminta menganalisis perubahan volume akibat perubahan jari-jari. Hanya satu kelompok yang berhasil menyimpulkan bahwa penggandaan jari-jari menyebabkan volume bola menjadi delapan kali lipat.

Secara keseluruhan, hasil *posttest* menunjukkan bahwa seluruh kelompok mampu menyelesaikan soal yang menggunakan rumus luas permukaan dan volume bola secara langsung. Namun, kesulitan masih ditemukan ketika siswa harus mengolah informasi, mengubah bentuk persamaan, dan menganalisis hubungan antara perubahan jari-jari dan volume. Hal ini menunjukkan bahwa kemampuan menerapkan rumus belum sepenuhnya

diikuti oleh kemampuan menyelesaikan permasalahan dengan tuntutan penalaran yang lebih kompleks.

Hal tersebut dapat dikaji berdasarkan kemampuan kognitif dalam Taksonomi Bloom. Lestari dan Sopiany (2022) mengkaji kemampuan kognitif siswa dalam menyelesaikan masalah matematika dan menemukan adanya perbedaan capaian berdasarkan kemampuan matematika siswa. Hal ini menjadi pembanding untuk memahami bahwa keberhasilan siswa dalam menyelesaikan masalah matematika dapat berbeda sesuai dengan tuntutan penyelesaian dan kemampuan yang dimiliki. Selain itu, Tefi et al. (2022) menemukan bahwa kesalahan siswa dalam menyelesaikan soal bangun ruang sisi lengkung dapat terjadi pada tahap memahami soal, melakukan transformasi, menjalankan keterampilan proses, dan menuliskan jawaban akhir.

Peran Learning Trajectory dalam Membantu Pemahaman Siswa

Learning Trajectory (LT) yang dirancang dalam pembelajaran ini berperan dalam membantu siswa memahami konsep luas permukaan dan volume bola secara bertahap. Melalui aktivitas konkret dan penggunaan LKPD, siswa tidak langsung diberikan rumus, tetapi terlebih dahulu diajak mengamati dan menemukan hubungan matematis dari kegiatan yang dilakukan. Pendekatan ini sejalan dengan Aklimawati dkk. (2022) yang membahas penerapan LT berbasis *Realistic Mathematics Education* (RME) melalui alur pembelajaran dari situasi nyata menuju konsep matematika formal.

Peran LT terlihat ketika siswa mampu menyelesaikan soal yang menggunakan rumus secara langsung setelah mengikuti rangkaian aktivitas pembelajaran. Meskipun demikian, hasil *posttest* menunjukkan bahwa beberapa kelompok masih mengalami kesulitan ketika harus mengolah informasi, mengubah bentuk persamaan, dan menganalisis hubungan antara perubahan jari-jari dan volume bola. Hal ini menunjukkan bahwa pemahaman konsep berkembang secara bertahap dan tidak berhenti pada kemampuan menggunakan rumus. Oleh karena itu, penyusunan alur pembelajaran yang menghubungkan pengalaman konkret dengan konsep formal menjadi penting agar siswa dapat memahami alasan penggunaan rumus, bukan sekadar menghafalnya. Dengan demikian, *Learning Trajectory* memberikan alur belajar yang membantu siswa membangun pemahaman dari kegiatan konkret menuju penerapan konsep matematika.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Penerapan *Learning Trajectory* pada materi luas permukaan dan volume bola melalui pendekatan lingkaran dan kerucut menunjukkan hasil yang positif dalam membantu siswa kelas IX membangun pemahaman konsep matematika secara bertahap. Hal ini ditunjukkan melalui hasil posttest yang memperlihatkan bahwa seluruh kelompok mampu menyelesaikan soal yang menggunakan rumus luas permukaan dan volume bola secara langsung. Meskipun demikian, beberapa siswa masih mengalami kesulitan dalam mengolah informasi dan menganalisis hubungan matematis yang lebih kompleks. Perbedaan hasil tersebut dapat dipengaruhi oleh perbedaan kemampuan kognitif siswa dalam memahami konsep dan menyelesaikan permasalahan matematika. Dengan demikian, *Learning Trajectory* dapat menjadi alternatif pembelajaran yang membantu siswa memahami konsep melalui pengalaman konkret sebelum mempelajari bentuk matematika formal. Penelitian selanjutnya disarankan untuk mengembangkan aktivitas pembelajaran yang lebih bervariasi sesuai dengan kemampuan kognitif siswa serta melibatkan lebih banyak peserta didik agar penerapan *Learning Trajectory* pada materi luas permukaan dan volume bola dapat dikaji secara lebih mendalam.

DAFTAR REFERENSI

Aklimawati, A., Listiana, Y., Isfayani, E., Zainuddin, & Aulia, R. (2022). Pengembangan Hypothetical *Learning Trajectory* (HLT) berbasis Realistic Mathematics Education (RME) pada materi geometri. *Jurnal Serunai Matematika*, 14(2), 51–63. https://doi.org/10.37755/jsm.v14i2.665

Amahsyah, I. G., Utami, R. E., & Nursyahidah, F. (2025). Pengembangan Hypothetical *Learning Trajectory* kerucut menggunakan Realistic Mathematics Education berbantuan GeoGebra. *Aksioma: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika, 16*(1). https://doi.org/10.26877/aks.v16i1.22750

Fauzi, A. H. (2021). Kesulitan siswa sekolah dasar pada materi geometri bangun ruang ditinjau dari persepsi guru. *DIKMAT: Jurnal Pendidikan Matematika*, 1(2), 17–23.

Fauziyah, N. (2023). *Learning Trajectory* in problem-based mathematics learning with literacy and numeracy reinforcement: An implementation of lesson study at junior high school. *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika), 7*(2). https://doi.org/10.31764/jtam.v7i2.12883

Febriyanti, F., & Syahfitri, D. (2022). Ethnomathematics at Javanese traditional food market. *Jurnal Pijar MIPA, 17*(2), 156–160. https://doi.org/10.29303/jpm.v17i2.3107

Juana, N. A., Kaswoto, J., Sugiman, & Hidayat, A. A. A. (2023). The *Learning Trajectory* Of Set Concept Using Realistic Mathematics Education (RME). *Jurnal Pendidikan Matematika*, 17(1), 89–102. https://doi.org/10.22342/jpm.17.1.19077.89-102

Kohar, A. W., Fachruddin, A. D., & Widadah, S. (2021). Facilitating Students' Multiple Intelligences Through RME: A *Learning Trajectory* Of Volume And Surface Area

Measurement. *Jurnal Inovasi Matematika*, 3(1), 27–50. https://doi.org/10.35438/inomatika.v3i1.248

Lestari, A. A., & Sopiany, H. N. (2022). Deskripsi Kemampuan Kognitif Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Pemecahan Masalah Matematika Berdasarkan Taksonomi Bloom. *Jurnal Didactical Mathematics, 4*(1), 84–93. https://doi.org/10.31949/dm.v4i1.2079

Lestari, U. P. (2022). *Learning Trajectory* konsep nilai tempat tiga angka. *SITTAH: Journal of Primary Education, 3*(1), 16–27. https://doi.org/10.30762/sittah.v3i1.2

Meirida, S., Johar, R., & Ahmad, A. (2022). Pengembangan Lintasan Belajar Limas Untuk Mengembangkan Kemampuan Spasial Siswa Melalui Pendidikan Matematika Realistik Berbantuan Geogebra. *PYTHAGORAS Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika, 16*(1). https://doi.org/10.21831/pg.v16i1.36157

Nursyahidah, F., Albab, I. U., & Rubowo, M. R. (2025). Hypothetical *Learning Trajectory* for Ninth Graders' Understanding of Curved Three-Dimensional Shapes through Javanese Ethno-Realistic Mathematics Education. *Plusminus: Jurnal Pendidikan Matematika, 5*(2). https://doi.org/10.31980/plusminus.v5i2.2906

Rosyida, D., Zahra, F., & Safira, P. (2026). Eksplorasi konsep bangun ruang bola pada jajanan tradisional onde-onde. *POLINOMIAL, 5*(3), 1460–1469.

Tarida, L., Anjarsari, E., Hasan, B., & Widayati, F. E. (2023). How does student learn mathematics through traditional food? (A hypothetical *Learning Trajectory*). *Unnes Journal of Mathematics Education, 12*(3), 205–212. https://doi.org/10.15294/ujme.v12i3.71337

Tefi, J. T., Fitriani, F., & Deda, Y. N. (2022). Analisis Kesalahan Siswa Kelas IX SMPN 1 Amanuban Barat Dalam Menyelesaikan Soal Matematika Pokok Bahasan Bangun Ruang Sisi Lengkung. *MATH-EDU: Jurnal Ilmu Pendidikan Matematika, 7*(1), 46–59. https://doi.org/10.32938/jipm.7.1.2022.46-59

Utami, M. A. P., Mahdiyah, N., & Agusdianita, N. (2025). Kesulitan siswa dalam memahami volume bola: Studi kasus di SD Negeri 114 Rejang Lebong. *Sindoro: Cendikia Pendidikan, 18*(1), 1311–1320.

https://cibjournal.com/index.php/sindoro/article/view/2115

Umasugi, S. M., Sugiman, S., Jana, P., & Kraiviset, P. (2022). Realistic Mathematics Education (RME)-Based *Learning Trajectory* For Arithmetic Social Using Culinary Context Of Yogyakarta. Jurnal Kependidikan: *Jurnal Hasil Penelitian Dan Kajian Kepustakaan Di Bidang Pendidikan, Pengajaran, Dan Pembelajaran*, 8(4), 985–996. https://doi.org/10.33394/jk.v8i4.6176

Wahyuni, I. M., Mardiyana, M., Nursatin, Y. B., & Nurhasanah, F. (2025). *Learning Trajectory* in mathematics education for geometry topic. *Jurnal Math Educator Nusantara: Wahana Publikasi Karya Tulis Ilmiah di Bidang Pendidikan Matematika, 11*(1), 147–159. https://doi.org/10.29407/jmen.v11i1.24268